

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1948-008 3

Functies met louter monotone afgeleiden

J. Koren~~jaar~~



1948

Tweede vergadering op Donderdag 21 April te 9 uur in de
Kindergeneeskundige Kliniek, van het Academisch
Ziekenhuis, Oostersingel 59.

De voorzitter opent de vergadering en geeft het woord aan de heer J. KORE-
VAAR (Amsterdam) tot het houden van zijn voordracht over: *Functies met
louter monotone afgeleiden.*¹⁾

$f(x)$ zij gedefinieerd op $-1 < x < 1$, reëel, en oneindig vaak
differentieerbaar. Als $f^{(n)}(x)$ geen tekenveranderingen heeft
op $(-1, 1)$ ($n = 0, 1, \dots$), dan is $f(x)$ in elk punt van $(-1, 1)$ te
ontwikkelen in een machtreeks, waarvan de convergentie-
cirkel wordt bepaald door een reëel singulier punt van $f(x)$
 < -1 of > 1 (S. BERNSTEIN 1928). We zullen hier op heel
eenvoudige manier bewijzen, dat $f(x)$ minstens analytisch
voortzetbaar is tot een functie, regulier in $|z| < 1$.

Als $f^{(n)}(x) > 0$ ($n = 0, 1, \dots$) is $f(x)$ analytisch voortzetbaar in
 $|z + 1| < 2$; als $(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$ ($n = 0, 1, \dots$), in $|z - 1| < 2$.¹⁾

In het algemene geval nemen we de opvolgende afgeleiden
van $f(x)$, waarvan de modulus toeneemt (afneemt), samen tot
een *permanentie* (*alternantie*). De afgeleiden van een permanentie
hebben alle hetzelfde, die van een alternantie afwisselend teken.
Stel er zijn oneindig veel van die groepjes (zie boven). Noem de
orden van de eerste afgeleiden uit de groepjes n_0 ($= 0$), $n_1, n_2, \dots$
($n_0 < n_1 < n_2 < \dots$), en stel $n_k - n_{k-1} = p_k$. We schatten
 $f^{(n)}(0)$, $n = n_k + p$, $0 \leq p < p_{k+1}$. Stel voor het gemak dat
 $f^{(n_k)}(x)$ tot een permanentie behoort, met allemaal positieve
afgeleiden. Neem $x > 0$ (in een alternantie < 0):

$$f^{(n_k-1)}(x) = f^{(n_k-1)}(0) + x f^{(n_k)}(0) + \dots +$$

$$x^{p+1} f^{(n_k+p)}(0) / (p+1)! + R.$$

¹⁾ Zie voor literatuur J. KOREVAAR, De nulpunten van de afgeleiden van een
functie en zijn analytisch karakter, Rapport ZW 1948-004, Mathematisch Cen-
trum, Amsterdam.

J. Korevaar:

Functies met louter monotone afgeleiden.
Functions with monotonic derivatives only.

Hier staan louter termen > 0 , behalve de eerste twee (uit een alternantie). We kunnen dus schatten

$$|x^{p+1} f^{(n_k+p)}(0) / (p+1)!| \leq |f^{(n_k-1)}(0)|,$$

en door $x \rightarrow 1$, en de redenering voort te zetten,

$$|f^{(n_k+p)}(0)| \leq (p+1)! p_k! \dots p_2! |f^{(n_1-1)}(0)| = (p+1)! p_k! \dots p_1! M.$$

Heel grof schattend:

$$|f^{(n)}(0) / n!| \leq (p+1) M \leq n M \quad (n \geq n_1).$$

De machtreeks $\sum f^{(n)}(0) z^n / n!$ is dus voor $|z| < 1$ convergent. En voor reële $z = x$ is zijn som $f(x)$. Laat x vast, > 0 .

Breek dan af in een alternantie. We krijgen een partiële som van de reeks, die van $f(x)$ verschilt

$$|f^{(n)}(0) x^n / n! - f^{(n)}(0) x^n / n!| \leq n M x^n.$$